

**Solutions finales des exercices**

Voici les réponses finales des exercices des différentes listes. Le fichier sera mis à jour au fur et à mesure de l'avancement des TP.

**Liste 0**

Exercice 1 :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} = \frac{1}{e}$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln(m!)}{m} - \ln(m) = -1$

Exercice 2 :  $\Gamma(5/6) = \frac{2\pi}{\Gamma(1/6)}$

**Liste 1**

Exercice 1 :

(a)  $f_m \notin C^0(\mathbb{R})$  ;  $f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

$$\|f_m\|_1 = 2 \quad ; \quad \|f_m\|_2 = \sqrt{\frac{2}{m}} \quad ; \quad \|f_m\|_\infty = \frac{1}{m}$$

(b)  $f_m$  converge ponctuellement vers 0 sur  $\mathbb{R}$  et converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}$ .

(c)  $f_m$  ne converge pas pour la norme  $\|\cdot\|_1$ ,  $f_m$  converge vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_2$  et  $f_m$  converge vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Exercice 2 :

(a)  $f_m \in C^0([0, +\infty[) \cap L^1([0, +\infty[) \cap L^2([0, +\infty[) \cap L^\infty([0, +\infty[)$

$$\|f_m\|_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad ; \quad \|f_m\|_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \|f_m\|_\infty = \sqrt{m}e^{-1}$$

(b)  $f_m$  converge ponctuellement vers 0 sur  $]0, +\infty[$  et  $f_m$  ne converge pas uniformément sur  $]0, +\infty[$ .

(c)  $f_m$  converge vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_1$ ,  $f_m$  ne converge pas pour la norme  $\|\cdot\|_2$  et  $f_m$  ne converge pas pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Exercice 3 :

(a)  $A = \mathbb{R}_0$  et  $f_m$  converge ponctuellement vers 0 sur  $\mathbb{R}_0$ .

(b)  $f_m$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_0$ , mais  $f_m$  converge uniformément vers 0 sur les ensembles bornés fermés inclus dans  $\mathbb{R}_0$ .

(c)  $f_m$  converge vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et  $f_m$  ne converge pas pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

Exercice 6 :

(a) La suite de fonctions converge ponctuellement vers 0 sur  $\mathbb{R}_0$ , elle ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}_0$ , mais elle converge uniformément vers 0 sur les compacts de  $\mathbb{R}_0$ .

(b)  $\delta_n \in C^0(\mathbb{R})$ ,  $\delta_n \in L^1(\mathbb{R})$  et ne converge pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $\delta_n \in L^2(\mathbb{R})$  et ne converge pas dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $\delta_n \in L^\infty(\mathbb{R})$  et ne converge pas dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

## Liste 2

Exercice 1 :

(a)

$$f \star g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ \frac{(y+1)^2}{4} & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < y < 3 \\ 1 - \frac{(y-3)^2}{4} & \text{si } 3 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{si } y > 5 \end{cases}$$

Exercice 2 :

(a)  $f \star g(y) = -ye\chi_{[0,+\infty[}(y), \quad y \in \mathbb{R}$

(b)  $f \star g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{y \sin(y)}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

(c)  $f \star g(y) = e^{-|y|} + |y|e^{-|y|}, \quad y \in \mathbb{R}$

Exercice 5 :

$$\chi_A \star \chi_B(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u| > 2 \\ \pi/2 + \arcsin(u+1) + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(u+1)) & \text{si } -2 \leq u \leq 0 \\ \pi/2 - \arcsin(u-1) - \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(u-1)) & \text{si } 0 < u \leq 2 \end{cases}$$

Exercice 6 :

(a)  $g_n \star g_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| > n+1 \\ n+1+y & \text{si } -n-1 \leq y \leq -n+1 \\ 2 & \text{si } -n+1 < y < n-1 \\ n+1-y & \text{si } n-1 \leq y \leq n+1 \end{cases}$

## Liste 3

Exercice 1 :

(1)  $\mathcal{F}_y^+ f_1 = \frac{-1}{i+iy-1}$  et  $\mathcal{F}_y^- f_1 = \frac{-1}{i-iy-1}, \quad y \in \mathbb{R}$

(2)  $\mathcal{F}_y^+ f_2 = iy \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}$  et  $\mathcal{F}_y^- f_2 = -iy \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{y^2}{4}}, \quad y \in \mathbb{R}$

(3)  $\mathcal{F}_y^+ f_3 = \frac{2a}{y^2} (1 - \cos(\frac{y}{a})) = \mathcal{F}_y^- f_3, \quad y \in \mathbb{R}$  pp

(4)  $\mathcal{F}_y^+ f_4 = \frac{2e^{iy}}{1+y^2}$  et  $\mathcal{F}_y^- f_4 = \frac{2e^{-iy}}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}$

(5)  $\mathcal{F}_y^+ f_5 = i \left( \frac{\sin(y-2)}{y-2} - \frac{\sin(y+2)}{y+2} \right)$  et  $\mathcal{F}_y^- f_5 = i \left( \frac{\sin(2+y)}{2+y} - \frac{\sin(-y+2)}{2-y} \right), \quad y \in \mathbb{R}$  pp

Exercice 2 : La réciproque est fautive, mais on a quand même le résultat suivant : si la transformée de Fourier d'une fonction est paire (resp. impaire), alors cette fonction est paire (resp. impaire) pp.

Exercice 3 :

(1)  $\mathcal{F}_y e^{-\lambda| \cdot |} = \frac{2\lambda}{y^2 + \lambda^2}, \quad y \in \mathbb{R}$

Exercice 4 :  $\mathcal{F}_y^+ f = \frac{2}{y^2} (1 - \cos(y)), \quad y \in \mathbb{R}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx = \pi/3$

Exercice 5 :

(1)  $\frac{\pi}{2} \min(a, b)$

(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \cos(bx)}{x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ \pi/4 & \text{si } a = b \\ \pi/2 & \text{si } a > b \end{cases}$$

(3)  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$

Exercice 6 :  $\pi/4$

### Liste 4

Exercice 1 :  $g = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^+ \mathcal{F}^- f$  convient

Exercice 2 : (2) L'unique solution est  $f = 0$ .

### Liste 5

Exercice 1 :  $\mathcal{F}_y^+ f = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+y^2}} e^{i \frac{1}{2} \arctan(y)}$ ,  $y \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : L'ensemble des solutions est

$$\{f(x+ct) + g(x-ct) : g, f \in C^2(\mathbb{R})\}.$$

Exercice 4 : La solution est  $U(x, t) = \left( f \star G_{\sqrt{\frac{2\gamma t}{C}}} \right) (x)$ , où  $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ .

### Liste 6

Exercice 1 :

(1)  $\mathbb{F}_y^+ f = i\pi \operatorname{sign}(y) - i\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(1+y) - i\frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y-1)$

(2)  $\mathbb{F}_y^+ g = i \ln \left( \left| \frac{y+1}{y-1} \right| \right)$

(3)  $\mathbb{F}_y^+ h = \frac{i\pi}{y} (1 - e^{-|y|})$

Exercice 2 :

$$\mathbb{F}_y^+ f = \operatorname{sign}(y) \pi i e^{-|y|}$$

et

$$\mathbb{F}_y^+ g = \begin{cases} 0 & \text{si } y > 0 \\ -2i\pi e^y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{4a^2} (1 - e^{-2|a|})$$

Exercice 5 :

(a)  $f$  n'est pas intégrable, mais est de carré intégrable

(b)  $\mathcal{F}_y^+ Df = \pi(e^{-\frac{1}{a}|y|} - e^{-\frac{1}{b}|y|})$

(c)  $\mathbb{F}_y^+ f = \frac{i\pi}{y} (e^{-\frac{1}{a}|y|} - e^{-\frac{1}{b}|y|})$

## Liste 7

Exercice 1 : (2)  $a$ ,  $b$  et  $c$  doivent être distincts.

Exercice 3 : La projection d'un point  $x$  sur la boule unité fermée est  $\frac{x}{\|x\|}$  si  $x$  n'appartient pas à la boule, et  $x$  sinon.

## Liste 8

Exercice 1 : (2) Les développements en séries trigonométriques des 3 fonctions sont les suivants :

$$g_1(x) = \cos(10\pi x)$$

$$g_2(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\pi x) + \frac{1}{8} \cos(4\pi x)$$

$$g_3(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2 - 1)} \sin(2\pi mx)$$

Exercice 2 :

(1)

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)} \sin((2m+1)x)$$

(2)  $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  et  $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 3 :

(1)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4 \cos(2mx)}{\pi(1-4m^2)}$$

(2)  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{4m^2-1} = \frac{1}{2}$  et  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{4m^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

Exercice 4 :

(1)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{12(-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \sin(\pi mx)$$

(2)  $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

Exercice 5 :

(1)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m (e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+m^2)} \cos(mx) + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$$

(2)  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+m^2)^2} = \frac{1}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 4\pi) \frac{\pi}{(e^\pi - e^{-\pi})^2} - \frac{1}{2}$  et  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{1+m^2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$

Exercice 6 : (2)  $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 2\pi$  pour tout  $r \in [0, 1[$